

Organisation de l'Atelier

**Rappel de quelques concepts fondamentaux
de et pour la métrologie (10 mn)**

Méthodes d'estimation d'incertitudes (5 mn)

Applications (1h45)

Erreur ou incertitude ?

« Au moment du départ de votre train prévu à 11h55, il est 11h53 à votre montre. L'heure affichée par votre montre présente donc une erreur de 2 minutes par rapport à l'heure supposée vraie du départ du train »



Erreur ou incertitude ?

« Les heures affichées chez vous varient de 22h02 et 22h08.

Vous vous dites que l'heure exacte est entre 22h00 et 22h10, et définissez ainsi un intervalle raisonnable d'incertitude autour de la valeur moyenne des valeurs mesurées soit $22h05 \pm 5 \text{ min}$. Cet intervalle de 5 min est appelé incertitude. »



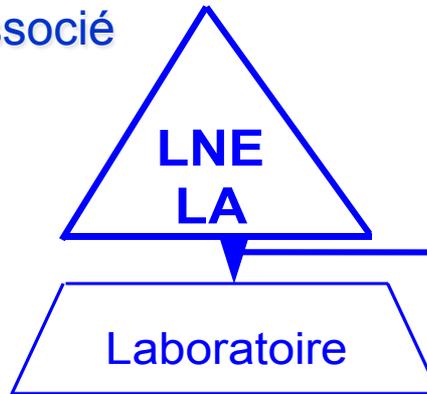
Traçabilité

LNE : Laboratoire National de métrologie
et d'Essais
LA : Laboratoire associé

Traçabilité **INTERNE**
par étalonnage ou Vérification

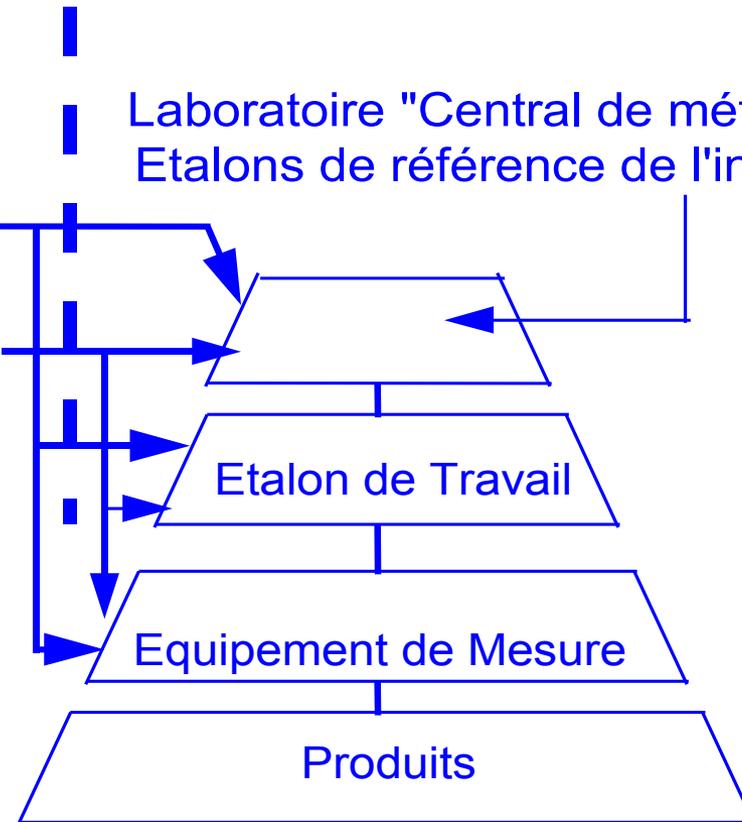
LNE
et LA

Laboratoires
accrédités



Laboratoire "Central de métrologie"
Etalons de référence de l'industriel

Traçabilité **EXTERNE ASSUREE**
par les laboratoires accrédités
COFRAC

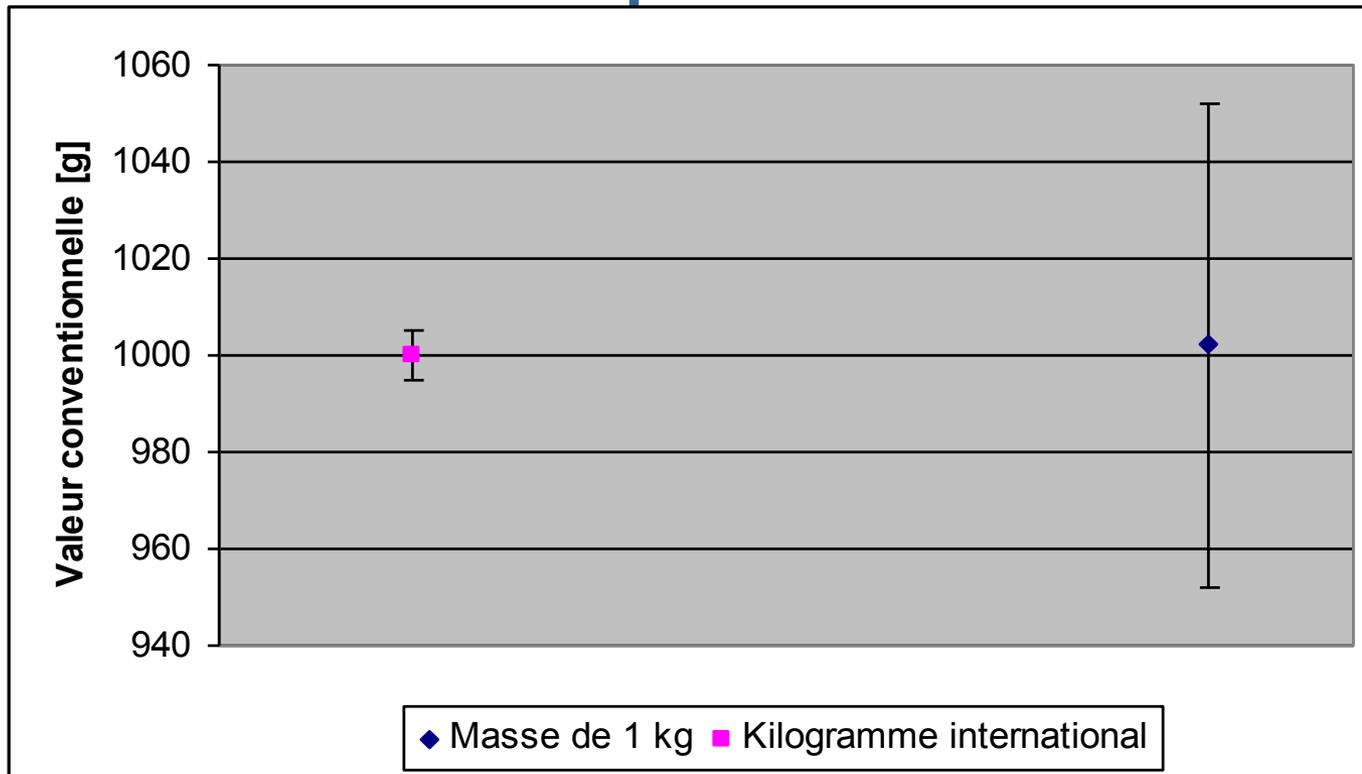


Traçabilité

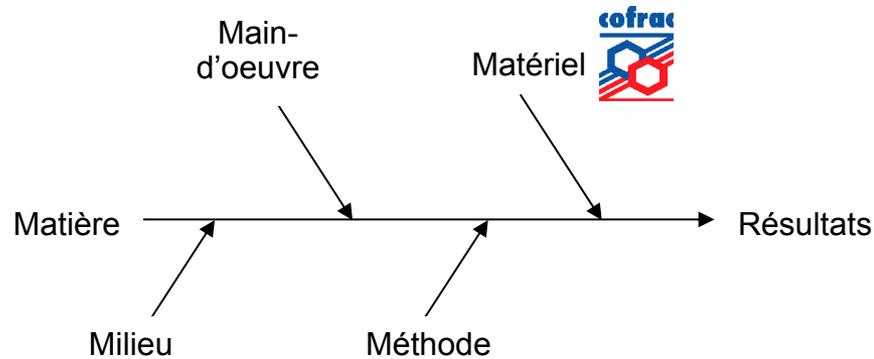
Traçabilité : Propriété du résultat d'un mesurage ou d'un étalon tel qu'il puisse être relié à des références déterminées, généralement des étalons nationaux ou internationaux, par l'intermédiaire d'une chaîne ininterrompue de comparaisons ayant toute des incertitudes déterminées

Traçabilité

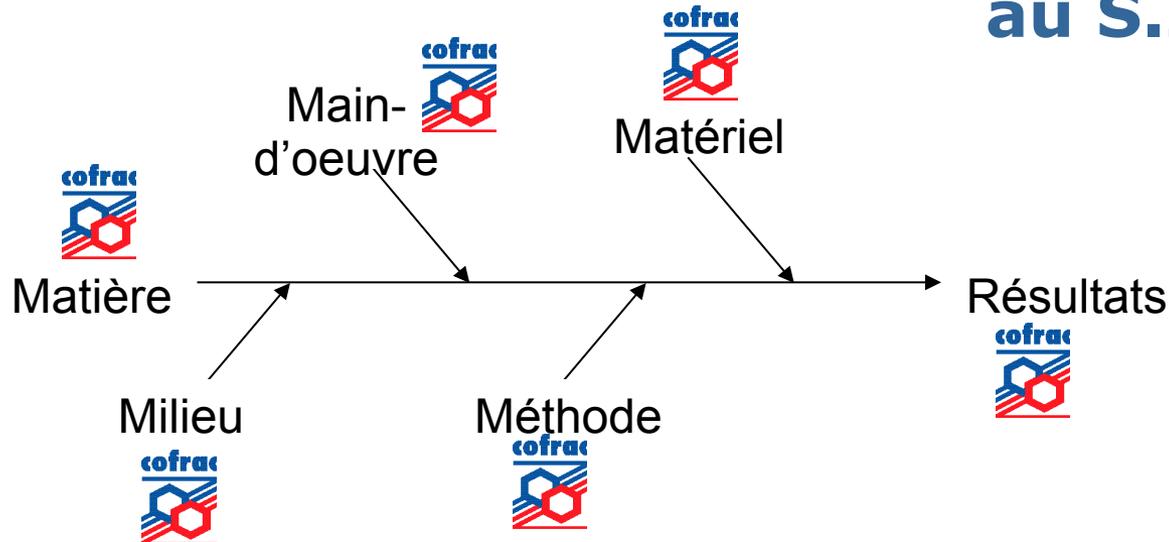
Une masse identifiée est traçable aux système international d'unités : la valeur conventionnelle de cette masse, d'une part, et la valeur conventionnelle du prototype international (conservé au BIPM), d'autre part, sont égales aux incertitudes près



Traçabilité



Le raccordement d'un étalon au S.I. ne suffit pas à assurer les résultats d'étalonnage de l'instrument étalonné au S.I.



Traçabilité

Apporter la preuve de la traçabilité :

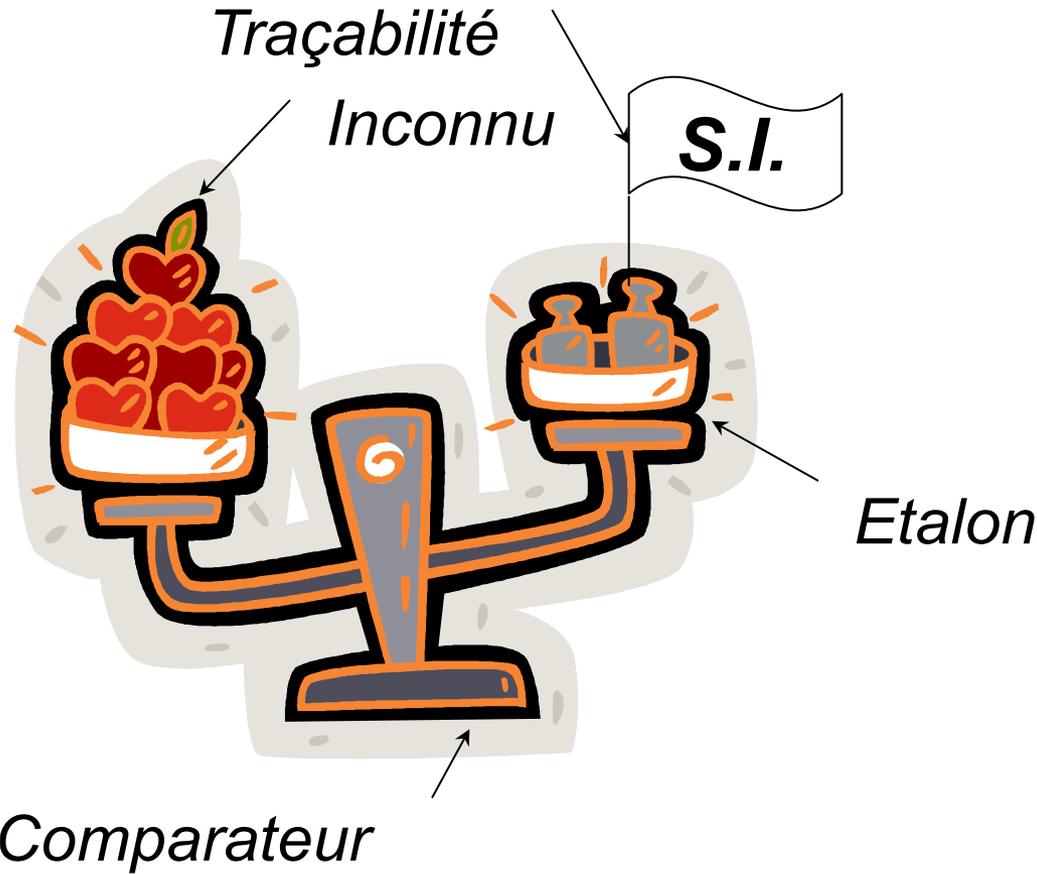
Un rapport sur les résultats émis par un Laboratoire National de Métrologie signataire du MRA (arrangement de reconnaissance mutuelle) du BIPM

Un rapport sur les résultats émis par un laboratoire d'étalonnage accrédité par un accréditeur signataire d'un accord de reconnaissance mutuelle EA ou ILAC

Un rapport sur les résultats émis par un laboratoire d'essai accrédité pour son propre compte

www.cofrac.fr, www.bipm.fr, www.european-accréditation.org, www.ilac.org

Étalonnage



**Étalonner, c'est
comparer (par
l'intermédiaire
de mesures) à
un étalon**

Étalonnage

Soient

$X_{\text{étalon}}$ la valeur attribuée au mesurande de l'étalon

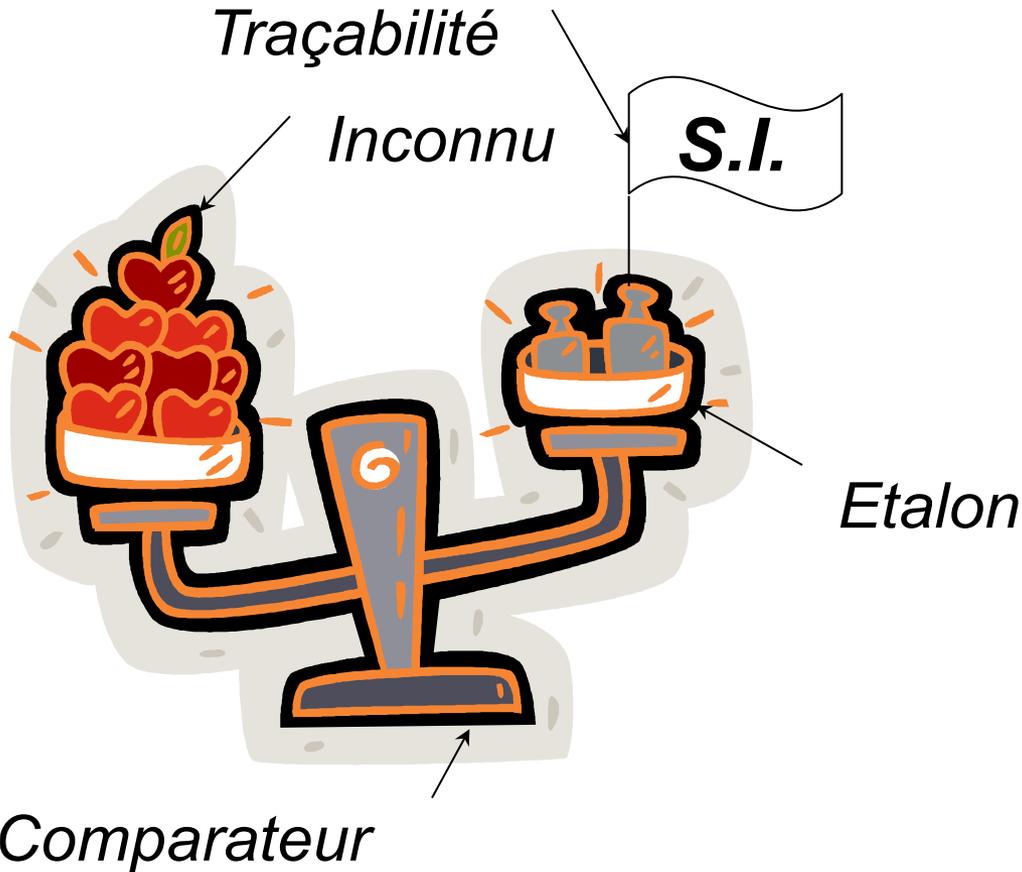
$X_{\text{équipement}}$ la valeur attribuée au mesurande de l'équipement étalonné

L'étalonnage fournit :

Une erreur : $(X_{\text{équipement}} - X_{\text{étalon}})$ ou une correction : $-(X_{\text{équipement}} - X_{\text{étalon}})$

Une incertitude U sur la correction

Vérification



- Vérifier, c'est confronter les résultats de l'étalonnage à une spécification

Vérification

Soient

$X_{\text{étalon}}$ la valeur attribuée au mesurande de l'étalon

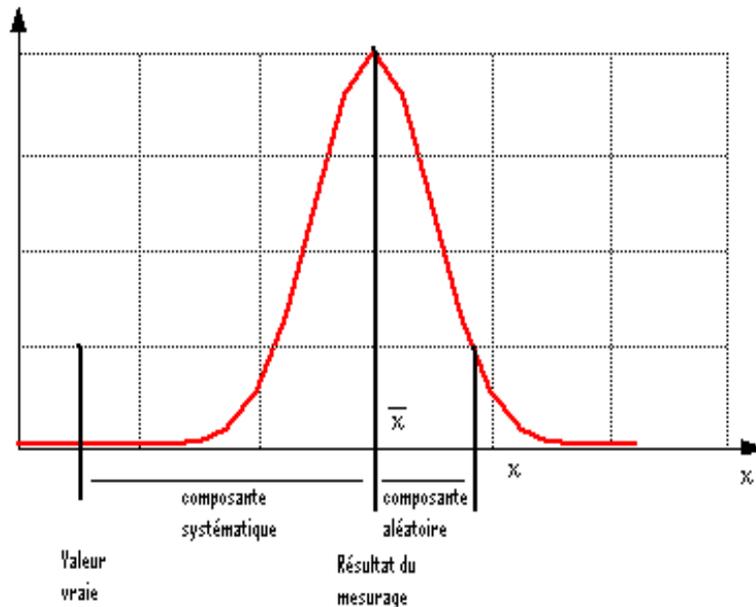
$X_{\text{équipement}}$ la valeur attribuée au mesurande de l'équipement étalonné

La vérification fournit :

Un "GO" si $|(X_{\text{équipement}} - X_{\text{étalon}}) + U| < \text{spécification}$

Un "NO GO" si $|(X_{\text{équipement}} - X_{\text{étalon}}) + U| > \text{spécification}$

- Pourquoi la valeur mesurée n'est-elle pas la mesure vraie ?



Erreurs systématiques

Erreurs aléatoires

Erreurs parasites, ...

INCERTITUDE - APPROCHE CLASSIQUE

Soit une caractéristique Y définie par une relation $f(x)$ dépendant de n variables x_i

Différentiel :

$$dY = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n$$

Incertitude absolue :

$$\Delta Y = \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 + \dots + \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} \right| \Delta x_n$$

INCERTITUDE - APPROCHE CLASSIQUE

L'incertitude relative sur un produit ou un quotient est égale à la somme des incertitudes relatives de chacun des termes

Soit
$$Y = \frac{A^\alpha \times B^\beta}{C^\gamma}$$

la différentielle logarithmique de Y :

L'incertitude relative sur Y :

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \alpha \frac{\Delta A}{A} + \beta \frac{\Delta B}{B} + \gamma \frac{\Delta C}{C}$$

$$\ln(Y) = \ln\left(\frac{A^\alpha \times B^\beta}{C^\gamma}\right)$$

$$\ln(Y) = \ln(A^\alpha \times B^\beta) - \ln(C^\gamma)$$

$$\ln(Y) = \ln(A^\alpha) + \ln(B^\beta) - \gamma \ln(C)$$

$$\ln(Y) = \alpha \ln(A) + \beta \ln(B) - \gamma \ln(C)$$

$$\frac{dY}{Y} = \alpha \frac{dA}{A} + \beta \frac{dB}{B} - \gamma \frac{dC}{C}$$

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

■ Approche GUM

- Mesurande : M
- Modélisation du processus:

$$M = f(x_1, x_2, x_3, \dots x_i)$$

- Erreurs identifiables :
 - vis à vis de x_1
 - vis à vis de x_2
 - ...
 - vis à vis de x_i

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- Composition de deux méthodes :
 - Méthode d'évaluation de Type A
 - Méthode d'évaluation de Type B

Important : une même composante peut être évaluée par une méthode de «type A» ou de «type B»

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- Méthode d'évaluation de Type A
 - Techniques basées sur un procédé statistique
 - Utilisation de séries d'observations induisant une distribution de probabilité permettant le calcul d'un écart-type d'échantillon, appelé incertitude-type

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- Méthode d'évaluation de Type B
 - Toutes autres techniques non basées sur un procédé statistique (observation, calcul, ...)
 - Utilisation de toutes les connaissances disponibles, en leur associant une loi de probabilité (et une densité de probabilité «supposée»), permettant le calcul d'un écart-type, appelé incertitude type

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- Incertitude composée u_c
 - Cette incertitude est calculée à partir des différentes valeurs des incertitudes types évaluées selon les méthodes de Type A (s) ou de Type B (u) en appliquant la loi de propagation de l'incertitude :

$$u_c(y) = \sqrt{\sum s^2 + \sum u^2}$$

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- Incertitude élargie U
 - L'incertitude U d'un résultat de mesure est appelée incertitude élargie et se calcule en multipliant l'incertitude- type composée par un facteur d'élargissement k (généralement égal à 2 ou 3) :

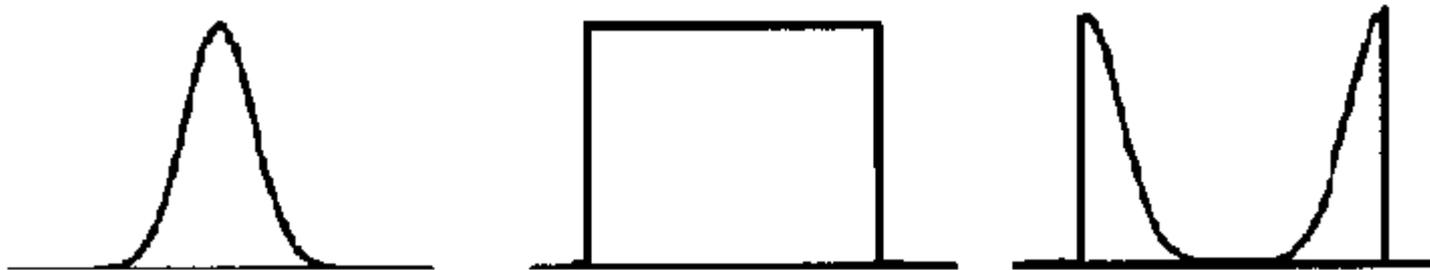
$$U = k \cdot u_c(y)$$

d'où l'expression finale d'un résultat de mesure :

$$Y = y \pm U$$

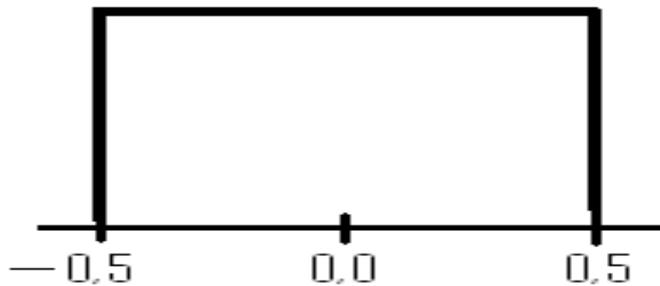
INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- Un estimateur de forme appelé loi de probabilité : Fonction déterminant la probabilité qu'une variable aléatoire prenne une valeur donnée quelconque ou appartienne à un ensemble donné de valeur [ISO 3534-1, 1.3]
 - Loi normale, uniforme, dérivée d'arcsinus, etc



INCERTITUDE - APPROCHE GUM

Comment décrire une population dans la pratique ? Cas de la résolution R



$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \int_{-R/2}^{+R/2} (x - 0)^2 \frac{1}{R} dx$$

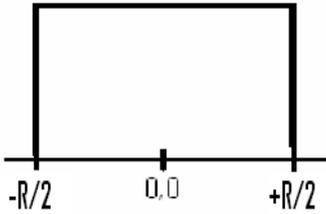
$$V(X) = \int_{-R/2}^{+R/2} \frac{x^2}{R} dx = \left[\frac{x^3}{3R} \right]_{-R/2}^{+R/2}$$

$$V(X) = \frac{\left(+R/2\right)^3}{3R} - \frac{\left(-R/2\right)^3}{3R} = \frac{2R^3}{24R} = \frac{R^2}{12}$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)} = \frac{R}{2\sqrt{3}}$$

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

- la résolution R d'une balance de pesée est décrite par les estimateurs :

Loi	Distribution	Variance	Ecart-type
Uniforme		$R^2 / 12$	$R / 2\sqrt{3}$

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

LOIS SYMETRIQUES	COURBES	VARIANCE	ECART-TYPE
normale 99,73 % $a = 3\sigma$		$\frac{a^2}{9} = \frac{d^2}{36}$	$\frac{a}{\sqrt{9}} = \frac{d}{\sqrt{36}} = \frac{a}{3} = \frac{d}{6}$
triangle isocèle		$\frac{a^2}{6} = \frac{d^2}{24}$	$\frac{a}{\sqrt{6}} = \frac{d}{\sqrt{24}} = \frac{a}{2,449} = \frac{d}{4,89}$
trapèze isocèle $0 < \beta < 1$		$\frac{a^2(1+\beta^2)}{6}$	$\frac{a\sqrt{1+\beta^2}}{\sqrt{6}}$
uniforme		$\frac{a^2}{3} = \frac{d^2}{12}$	$\frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{d}{\sqrt{12}} = \frac{a}{1,732} = \frac{d}{3,464}$
dérivée d'arcsinus		$\frac{a^2}{2} = \frac{d^2}{8}$	$\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{d}{\sqrt{8}} = \frac{a}{1,414} = \frac{d}{2,828}$

INCERTITUDE - APPROCHE GUM

■ $M = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_i)$

Grandeur	Incertitude-type	Facteur de sensibilité	Incertitude-type en unité du mesurande
x1	$u(x1)$	$\delta M / \delta x1$	$u_{x1}(M)$
x2	$u(x1)$	$\delta M / \delta x2$	$u_{x2}(M)$
...
x_i	$u(x_i)$	$\delta M / \delta x_i$	$u_{x_i}(M)$
<i>variance = Σ incertitude-type²</i>			$\Sigma u_{x_i}^2(M)$
Incertitude-type composée = racine (Σ incertitude-type ²)			racine($\Sigma u_{x_i}^2(M)$)
Incertitude élargie = 2*racine (Σ incertitude-type ²)			2*racine($\Sigma u_{x_i}^2(M)$)

INCERTITUDE - APPROCHE ISO 5725

- Réaliser des essais d'exactitude et/ou de fidélité, c'est faire varier chacune des données d'entrée d'une « boîte noire » indépendamment des autres et observer la variation de la donnée de sortie qui en résulte
- Exploiter les valeurs de fidélité, répétabilité, reproductibilité obtenues lors de comparaison intra- et inter-laboratoires

APPLICATIONS

